OPERADORES DE T-INDISTINGUIBILIDAD RESPECTO A SUMAS ORDINALES

D. Boixader[1], **J. Recasens**[1]

[1]*Sec. Matemàtiques i Informàtica*
ETS Arquitectura del Vallès
Universitat Politècnica de Catalunya UPC
Sant Cugat del Vallès,
{dionis.boixader,j.recasens}@upc.edu

Resumen

En este trabajo se estudia la clase de operadores de T-indistinguibilidad con T una suma ordinal. Mostramos que estos operadores de T-indistinguibilidad pueden pensarse como familias de operadores de indistinguibilidad respecto a t-normas arquimedianas. Se propone una interpretación en términos de clustering jerárquico.

Palabras Clave: Relación borrosa, Operador de T-indistinguibilidad, t-norma, t-norma arquimediana, suma ordinal, clustering, clustering jerárquico, agregación jerárquica.

1 INTRODUCCIÓN

Las *relaciones de equivalencia* son relaciones reflexivas, simétricas y transitivas. En 1971 Zadeh publicó sus puntos de vista sobre cómo deberían fuzzificarse y a esta nueva clase de relaciones borrosas las llamó *relaciones de similitud* [11].

La definición original de Zadeh es

Definición 1.1. *Una relación de similitud E en un conjunto X es una aplicación $E : X \times X \to [0,1]$ tal que para todo $x,y \in X$*

1. $E(x,x) = 1$ *(Reflexividad)*
2. $E(x,y) = E(y,x)$ *(Simetría)*
3. $\min(E(x,y),E(y,z)) \leq E(x,z)$ *(Transitividad)*

Zadeh abrió la puerta al uso de otras t-normas aparte de la t-norma mínimo, idea que fue desarrollada por otros investigadores.

Ruspini [6] consideró la t-norma de Łukasiewicz y a las correspondientes relaciones las llamó *likeness* o relaciones de semejanza. Ovchinnikov [4] usó la t-norma producto siguiendo los pasos de Menger [3] trabajando con las llamadas *relaciones probabilísticas*. Trillas [8, 9] estudió la transitividad respecto a una t-norma arbitraria y propuso el término unificador de *indistinguibilidad* que ha sido usado desde entonces por diversos autores (véase por ejemplo Valverde [10], Jacas [1] y Recasens [5]). Otros términos son *igualdad borrosa* (algo más restrictivo) y *relación de equivalencia borrosa*.

La definición de operador de indistinguibilidad es la siguiente.

Definición 1.2. *Un operador de indistinguibilidad respecto a una t-norma T en un conjunto X es una aplicación $E : X \times X \to [0,1]$ reflexiva y simétrica y tal que*

$$T(E(x,y),E(y,z)) \leq E(x,z)(T\text{-}Transitividad)$$

Todas las t-normas que consideraremos en este trabajo serán continuas. Estas t-normas son la t-norma mínimo, t-normas arquimedianas y *sumas ordinales*.

Hasta la actualidad, los autores no conocen un estudio específico de los operadores de T-indistinguibilidad cuando la t-norma usada para modelizar la transitividad es una suma ordinal. Este trabajo es un primer intento de atacar la situación. Este estudio es interesante porque pretende completar el estudio de los operadores de indistinguibilidad para t-normas continuas y por las consecuencias semánticas y prácticas, la más importante de las cuales es que los operadores de indistinguibilidad asociados pueden ser útiles en problemas de clustering en los cuales los atributos de los objetos están estructurados de forma jerárquica (véase Sección 3).

Para un estudio exhaustivo de las t-normas y sus propiedades, recomendamos los libros [2, 7]. En el próximo teorema recordamos la caracterización de t-normas continuas como sumas ordinales.

Teorema 1.3. *T es una t-norma continua si, y sólo si, existe una familia numerable de funciones continuas decrecientes $(t_i)_{i\in I}$ tal que $t_i : [a_i,b_i] \to [0,\infty]$ con $(a_i,b_i) \subseteq [0,1]$ y $t_i(b_i) = 0$ que satisface*

$$T(x,y) = \begin{cases} t_i^{[-1]}(t_i(x)+t_i(y)) & \text{si } x,y \in (a_i,b_i) \\ \min(x,y) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Nótese que si la familia es vacía, entonces $T = \min$ y que si se reduce a un único elemento, entonces T es arquimediana.

Definición 1.4. *En las condiciones del teorema anterior, $(t_i,(a_i,b_i))_{i\in I}$ se llama una suma ordinal.*

Intuitivamente, las sumas ordinales se pueden pensar como combinaciones de t-normas. Esto se consigue considerando una familia $(\varphi_i)_{i\in I}$ de funciones crecientes $\varphi_i : [0,1] \to [a_i,b_i]$ y las t-normas arquimedianas T_i asociadas que se inducen en el intervalo unidad por los generadores aditivos $t_i \circ \varphi_i$.

La elección standard de las funciones φ_i es $\varphi_i(x) = a_i + (b_i - a_i)x$ [2], si bien se pueden considerar otras alternativas. Así una suma ordinal se puede denotar por $T = \oplus_{i\in I} T_i$ y nos referiremos a T como la suma ordinal de las t-normas T_i. Cuando sea posible omitiremos referirnos a los intervalos (a_i,b_i) y a las funciones generadoras t_i.

Por cuestiones de simplicidad, nos restringiremos al caso especial de sumas ordinales en que $a_0 = 0$, $b_0 = a_1, \ldots, b_i = a_{i+1}, \ldots, b_n = 1$. Es decir, una suma ordinal de un número finito de intervalos sin huecos entre ellos.

En la siguiente sección presentamos una caracterización de relaciones de indistinguibilidad respecto a una suma ordinal como una familia de operadores de indistinguibilidad respecto a t-normas arquimedianas. Esta caracterización será usada en la Sección 3 para generar operadores de indistinguibilidad a partir de diferentes atributos de modo jerárquico; es decir, de modo que se tenga en cuenta la importancia u orden de éstos.

2 UN TEOREMA DE CARACTERIZACION

La idea principal de esta sección es que los operadores de T-indistinguibidad con T una suma ordinal como las descritas al final de la sección anterior no son más que familias estratificadas de operadores de indistinguibilidad respecto a t-normas arquimedianas, todos definidos en el mismo conjunto X.

Teorema 2.1. *Una relación E en un conjunto X es un operador de indistinguibilidad respecto a una suma ordinal $T = \oplus_{i\in I} T_i$ si, y sólo si, existe una familia $(E_i)_{i\in I}$ de operadores de indistinguibilidad respecto a t-normas arquimedianas T_i y una familia de funciones $\varphi_i : [0,1] \to [a_i,b_i]$ tal que $E = \inf_{i\in I} e_i$ con*

$$e_i(x,y) = \begin{cases} \varphi_i \circ E_i(x,y) & \text{si } E_i(x,y) < 1 \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Antes de proceder a la demostración del teorema, merece la pena comentar algunos puntos.

Primero, las funciones φ_i del Teorema 2.1 son las mismas que aparecen en la definición de $\oplus_{i\in I} T_i$.

Segundo, los bloques e_i a partir de los cuales se construye E son generados comprimiendo el rango de cada E_i (generalmente $[0,1]$) en secciones más estrechas $[a_i,b_i]$ que se van apilando una encima de la otra con la única excepción de los pares $E_i(x,y) = 1$ que se mantienen sin cambio. Así definidos, cada bloque e_i es un operador de indistinguibilidad respecto a una t-norma que es suma ordinal de sólo una t-norma T_i.

Finalmente, el Teorema 2.1 justifica la expresión *suma ordinal de operadores de indistinguibilidad* así como la notación $E = \oplus_{i\in I} E_i$.

Proof.

$\Rightarrow$)

Las relaciones borrosas E_i están definidas por

$$E_i(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } E_i(x,y) \le a_i \\ \varphi \circ E(x,y) & \text{si } a_i < E(x,y) < b_i \\ 1 & \text{si } E(x,y) \ge b_i. \end{cases}$$

Demostremos primero que estas relaciones borrosas son operadores de indistinguibilidad respecto a la t-norma arquimediana T_i con generador aditivo $t_i \circ \varphi_i$.

Reflexividad y simetría son inmediatas. Para demostrar la transitividad respecto a T_i, dados tres elementos $x,y,z \in X$ sólo hay tres casos distintos a considerar:

1. Si $E_i(x,y) = 0$, entonces $T_i(E_i(x,y),E_i(y,z)) \le E_i(x,z)$.

2. Si $0 < E_i(x,y) \le 1$ y $E_i(y,z) = 1$, entonces $a_i \le E(x,y) \le b_i$ pero $E(y,z) \ge b_i$ y la suma ordinal T se reduce a min en este caso particular, lo que significa que

$$\begin{aligned} T(E(x,y),E(y,z)) &= \min(E(x,y),E(y,z)) \\ &= E(x,y) \le E(x,z) \end{aligned}$$

(la última desigualdad gracias a la T-transitividad de E).

Como consecuencia, $E_i(x,y) \le E_i(x,z)$ y

$$\begin{aligned} T_i(E_i(x,y),E_i(y,z)) &= T_i(E_i(x,y),1) \\ &= E_i(x,y) \le E_i(x,z). \end{aligned}$$

3. Si $0 < E(x,y),\, E(y,z) < 1$, entonces

$$\begin{aligned}
&T_i(E_i(x,y),E_i(y,z))\\
&\quad = T_i(\varphi_i^{[-1]} \circ E_i(x,y), \varphi_i^{[-1]} \circ E_i(y,z))\\
&\quad = \varphi_i^{[-1]} \circ t_i^{[-1]}(t_i \circ \varphi \circ \varphi_i^{[-1]} \circ E_i(x,y)\\
&\qquad + t_i \circ \varphi \circ \varphi_i^{[-1]} \circ E_i(y,z))\\
&\quad = \varphi_i^{[-1]} \circ t_i^{[-1]}(t_i \circ E_i(x,y) + t_i \circ E_i(y,z))\\
&\quad = \varphi_i^{[-1]} \circ T(E_i(x,y),E_i(y,z))\\
&\quad \leq \varphi_i^{[-1]} \circ E_i(x,z) = E_i(x,z).
\end{aligned}$$

Para terminar la demostración en esta dirección, tenemos que ver que $E = \inf_{i \in I} e_i$. Con este fin, expresemos e_i en términos de E en lugar de E_i.

Si $a_i < E(x,y) < b_i$, entonces $E_i(x,y) = \varphi_i^{[-1]} \circ E(x,y) < 1$ y $e_i(x,y) = \varphi_i \circ E_i(x,y) = E(x,y)$.

Si $E(x,y) \leq a_i$, entonces $E_i(x,y) = 0$ y $e_i(x,y) = a_i$.

Si $E(x,y) \geq b_i$, then $E_i(x,y) = 1$ and $e_i(x,y) = 1$.

Supongamos ahora $a_i \leq E_i(x,y) \leq b_i$ para un cierto par $E(x,y)$. Para cualquier j y k tales que $j < i < k$, se tendrá que $e_j(x,y) = 1$, $e_i(x,y) = E(x,y)$ y $e_k(x,y) = a_k$ y, por consiguiente, $E = \inf_{i \in I} e_i$.

Nótese que nada varía si i corresponde al primer o último intervalo. También nótese que las condiciones $a_i \leq E(x,y) \leq b_i$ valen para todos los posibles valores de $E(x,y)$ excepto $E(x,y) = 1$ porque estamos asumiendo que $b_i = a_{i+1}$ en cuyo caso $e_i(x,y) = 1$.

$\Leftarrow$)

Consideremos la t-norma T suma ordinal de las t-normas arquimedianas T_i con el sistema de intervalos (a_i, b_i). Hay que demostrar que $E = \inf_{i \in I} e_i$ es un operador de indistinguibilidad respecto a $T = \oplus_{i \in I} T_i$. La reflexividad y simetría de E es obvia. Hay que ver que E también es T-transitiva.

Antes de proceder a la demostración, fijémonos en los siguientes resultados útiles.

Primero, es obvio que $e_i(x,y) \leq e_j(z,t)$ si $i < j$, excepto cuando $e_i(x,y) = 1$.

Segundo, $E(x,y) = 1$ si, y sólo si, $E_i(x,y) = 1$.

Tercero, si $E(x,y) < 1$, entonces $E(x,y) = e_i(x,y)$ si, y sólo si, $E(x,y) < 1$ y $E_j(x,y) = 1$ para todo $j < i$.

Finalmente, para todo $x,y,z \in X$, si $E(x,y) = e_i(x,y)$, $E(y,z) = e_j(y,z)$ y $E(x,z) = e_k(x,z)$, entonces $k \geq \min(i,j)$.

Para comprobar esta última afirmación, si se tuviera $k < \min(i,j)$, entonces $E_k(x,y) = E_k(y,z) = 1$. Pero E_k es T_k-transitiva y por tanto $E_k(x,z) = 1$, lo que contradice $E(x,z) = e_k(x,z)$.

Vamos a proceder a demostrar la T-transitividad de E; es decir, $T(E(x,y),E(y,z)) \leq E(x,z)$.

Supongamos que $E(x,y) = e_i(x,y)$, $E(y,z) = e_j(y,z)$ y $E(x,z) = e_k(x,z)$. De los comentarios anteriores, se sigue que sólo hay cinco casos que merecen nuestra atención, que son $i < j < k$, $i < j = k$, $i < k < j$, $i = k < j$ e $i = j = k$. El primero y tercero son inmediatos. Veamos los otros tres.

- $i < j = k$

$$\begin{aligned}
&T(E(x,y),E(y,z))\\
&\quad = \min(E(x,y),E(y,z))\\
&\quad = \min((e_i(x,y),e_k(y,z))\\
&\quad = e_i(x,y) \leq e_k(x,y) = E(x,z).
\end{aligned}$$

- $i = k < j$

$$\begin{aligned}
&T(E(x,y),E(y,z))\\
&\quad = \min(E(x,y),E(y,z))\\
&\quad = \min((e_i(x,y),e_j(y,z)) = e_i(x,z).
\end{aligned}$$

  Por otro lado, de $T_i(E_i(x,y),E_i(y,z)) \leq E_i(x,z)$ y $E_i(y,z) = 1$ se sigue que $E(x,y) \leq E(x,z)$ y por tanto $T(E(x,y),E(y,z)) \leq E(x,z)$.

- $i = j = k$

$$\begin{aligned}
&T(E(x,y),E(y,z))\\
&\quad = T(e_i(x,y),e_i(y,z))\\
&\quad = t_i^{[-1]}(t_i \circ e_i(x,y) + t_i \circ e_i(y,z))\\
&\quad = t_i^{[-1]}(t_i \circ \varphi_i \circ e_i(x,y) + t_i \circ \varphi_i \circ e_i(y,z))\\
&\quad = \varphi_i \circ T_i(E_i(x,y),E_i(y,z)) \leq \varphi \circ E_i(x,z)\\
&\quad = e_i(x,z) = E(x,z).
\end{aligned}$$

□

3 UNA INTERPRETACIÓN DE LAS SUMAS ORDINALES EN TÉRMINOS DE CLUSTERING JERÁRQUICO

Es bien conocido que el ínfimo de cualquier familia de operadores de T-indistinguibilidad es también un operador de T-indistinguibilidad [10].

Cuando clasificamos elementos de un conjunto de patrones X según dos criterios distintos, por ejemplo color y tamaño, podemos romper X en clusters menores combinando las dos clasificaciones independientes vía el ínfimo. Es decir, si E_c y E_t simbolizan las indistinguibilidades provenientes de color y tamaño respectivamente, entonces dos elementos son indistinguibles por $E_c \wedge E_t$ si lo son por E_c y por E_t. Pensándolo al revés, dos elementos son diferentes si pueden ser discriminados por al menos una de los dos criterios.

Con esta aproximación, ambas clasificaciones son exactamente igual de relevantes. Tamaño y color son considerados iguales como criterios válidos para discriminar los elementos de X. Sin embargo, puede darse el caso en que se desee que un criterio juegue un papel más importante que el otro. Por ejemplo, si las diferencias en tamaño entre dos objetos son suficientemente grandes, no hace falta considerar el color para separarlos. En este caso, el color será considerado sólo cuando el tamaño no discrimine.

Vale la pena tener en cuenta la importancia en considerar las palabras *coincidente*, *discriminar* de forma crisp o borrosa. En el primer caso, las dos aproximaciones en la clasificación coinciden, mientras que en el segundo el orden o jerarquía de los criterios es relevante.

Para ilustrar las diferencias en el caso borroso, continuemos con el ejemplo de tamaño y color.

Ejemplo 3.1. Sean $c : X \to [0,1]$ y $t : X \to [0,1]$ las funciones color y tamaño respectivamente, que son subconjuntos borrosos de X. Considerando la t-norma de Łukasiewicz, estos subconjuntos borrosos generan los operadores de indistinguibilidad $E_c(x,y) = 1-|c(x)-c(y)|$ y $E_t(x,y) = 1-|t(x)-t(y)|$ y el operador de indistinguibilidad generado por los dos es

$$\begin{aligned} E(x,y) &= E_c(x,y) \wedge E_t(x,y) \\ &= \min(1-|c(x)-c(y)|, 1-|t(x)-t(y)|). \end{aligned}$$

E es un operador de indistinguibilidad respecto a la misma t-norma que E_c y E_t (en este caso la t-norma de Łukasiewicz). Esta construcción de un operador de indistinguibilidad a partir de criterios borrosos (color, tamaño, etc.) es standard y constituye el núcleo del Teorema de Representación [10].

También es standard una representación geométrica del operador de indistinguibilidad E donde c y t son los ejes y $x, \ldots$ los puntos de coordenadas $x = (x_t, x_c) = (t(x), c(x)), \ldots$ [10, 5].

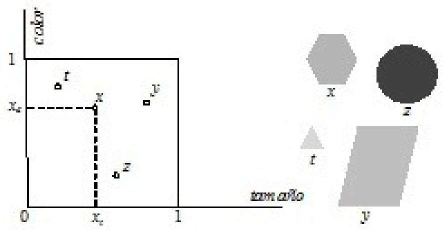

Figura 1:

Dicha representación implícitamente asume que los objetos $x, y, \ldots$ son parte de un universo mayor que X que en nuestro caso es $X' = [0,1]^2$. Por tanto, el grado de indistinguibilidad entre objetos está heredado por el grado en (X', E') y la responsabilidad última de percibir pares de objetos en X como indistinguibles recae en las bolas métricas o α-cortes de E'.

El α-corte centrado en x es el conjunto de puntos y en X' cuyo grado de indistinguibilidad con x es mayor o igual que α. En nuestro caso, $E = E_c \wedge E_t$ y tienen forma cuadrada.

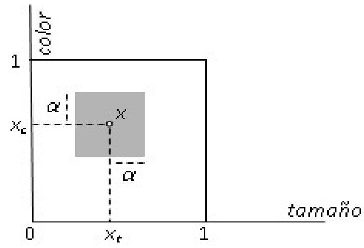

Figura 2:

¿Cómo serían las bolas en el caso jerárquico? Si damos prioridad al tamaño respecto del color, entonces las diferencias en tamaño determinan el grado de indistinguibilidad entre pares, y el color sólo es determinante cuando los tamaños son totalmente idénticos. Las bolas se verán como bandas verticales de ciertos radios (cercanos a cero), y como segmentos verticales para otros (cercanos a uno). Véanse las figuras 3 y 4.

El resto de esta sección está dedicada a justificar las figuras 3 y 4. El operador de indistinguibilidad $E = E_s \oplus E_t$ es T-transitiva respecto a la t-norma $T = T_Ł \oplus T_Ł$ ($T_Ł$ la t-norma de Łukasiewicz) con intervalos $a_0 = 0$, $b_0 = a_1 = 0.5$ y $b_1 = 1$. Los dos operadores de indistinguibilidad básicos E_s y E_t a partir de los cuales se calcula E han sido definidos previamente. Las aplicaciones φ_i son $\varphi_t : [0,1] \to [0,0.5]$ definida por $\varphi_t(x) = \frac{x}{2}$ y $\varphi_c : [0,1] \to [0.5,1]$ definida por $\varphi_c(x) = \frac{1+x}{2}$. Entonces E se obtiene como $E = e_t \wedge e_c$ donde

$$e_t(x,y) = \begin{cases} \varphi_t \circ E_t(x,y) & \text{si } E_t(x,y) < 1 \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$e_c(x,y) = \begin{cases} \varphi_c \circ E_c(x,y) & \text{si } E_c(x,y) < 1 \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La bola o α-corte centrado en x es

$$\begin{aligned} &B(x,a) \\ &= \{y \in [0,1]^2 \text{ tal que } E(x,y) \geq \alpha\} \\ &= \{y \in [0,1]^2 \text{ tal que } e_t(x,y) \wedge e_c(x,y) \geq \alpha\} \\ &= \{y \in [0,1]^2 \text{ tal que } \varphi_t \circ E_t(x,y) \geq \alpha \text{ o } E_t(x,y) = 1\} \\ &\cap \{y \in [0,1]^2 \text{ tal que } \varphi_c \circ E_c(x,y) \geq \alpha \text{ o } E_c(x,y) = 1\} \\ &= \{y \in [0,1]^2 \text{ tal que } E_t(x,y) \geq 2\alpha \text{ o } E_t(x,y) = 1\} \\ &\cap \{y \in [0,1]^2 \text{ tal que } E_c(x,y) \geq 2\alpha - 1 \text{ o } E_c(x,y) = 1\} \\ &= B_1 \cap B_2. \end{aligned}$$

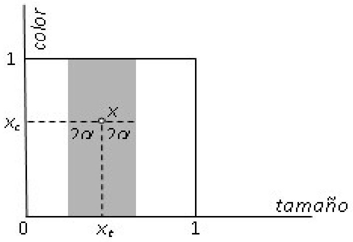

Figura 3:

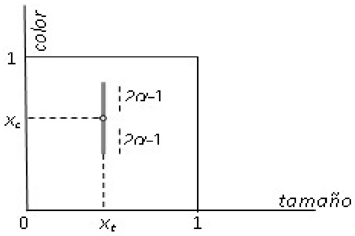

Figura 4:

Si $0 \leq \alpha \leq 0.5$, entonces $B_1 = \{y \in [0,1]^2$ tal que $E_t(x,y) \geq 2\alpha\}$ y $B_2 = [0,1]^2$, así que $B(x,\alpha) = B_1 \cap B_2 = B_1$.

Si $0.5 < \alpha \leq 1$, entonces $B_2 = \{y \in [0,1]^2$ tal que $E_c(x,y) \geq 2\alpha - 1\}$, así que $B(x,\alpha) = B_1 \cap B_2$ es simplemente un segmento (figura 4).

4 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha iniciado el estudio de los operadores de indistinguibilidad respecto de t-normas sumas ordinales.

Se ha obtenido una caracterización de dichos operadores a partir de familias de operadores de indistinguibilidad respecto a t-normas arquimedianas.

El resultado anterior se ha explotado para generar operadores de indistinguibuilidad a partir de subconjuntos borrosos (que pueden interpretarse como adecuación o valor de los objetos a determinados atributos) teniendo en cuenta un orden jerárquico en ellos que se considera su mayor a menor importancia o relevancia.

Referencias

[1] J. Jacas: On the generators of T-indistinguishability operators. Stochastica 12 pp. 49-63, 1988.

[2] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap: Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[3] K. Menger: Probabilistic theory of relations. Proc. Nat. Acad. Sci USA 37, pp. 178-180, 1951.

[4] S. Ovchinnikov: Representations of transitive fuzzy relations. In Skala, H.J. , Termini, S. and Trillas E. (eds.) Aspects of Vagueness, 1984, D. Reidel, Dordrecht, pp. 105-118.

[5] J. Recasens: Indistinguishability Operators. Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations Series: Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 260. 2011. Springer Verlag.

[6] E. Ruspini: A new approach to clustering. Information and Control 15 pp. 22-32, 1969.

[7] B. Schweizer, A. Sklar: Probabilistic Metric Spaces North Holland, Amsterdam, 1983.

[8] E. Trillas: Assaig sobre les relacions d'indistingibilitat. Proc. Primer Congrés Català de Lògica Matemàtica, Barcelona, 1982, pp.51-59.

[9] E. Trillas, L. Valverde: An inquiry into indistinguishability operators. Theory Decis. Lib. Reidel, Dordrecht,1984, pp.231-256.

[10] L. Valverde: On the Structure of F-indistinguishability Operators. Fuzzy Sets and Systems 17 pp. 313-328, 1985.

[11] L.A. Zadeh: Similarity relations and fuzzy orderings. Information Sciences 3 pp. 177-200, 1971.